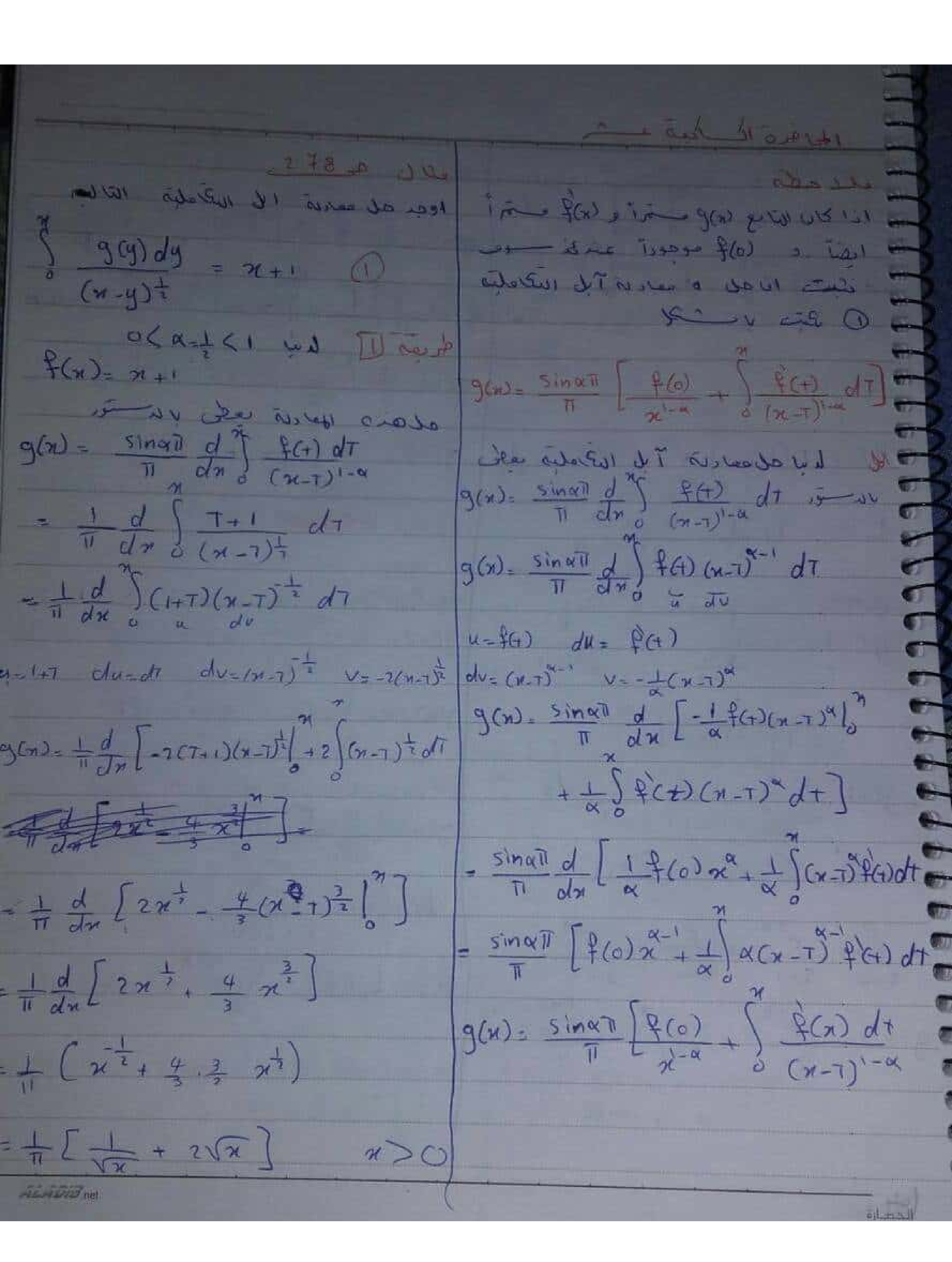


المحاضرة الثالثة عشر

ملاحظة

اذا كان التابع $g(x)$ مستمراً و $f'(x)$ مستمراً أيضاً و $f(0)$ موجوداً عندئذ سوف نثبت ان الحل ه معادلة آبل التكاملية (1) يعطى بالشكل

$$g(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}+\int_0^x\frac{f'(T)}{(x-T)^{1-\alpha}}\,dT\right]$$

الحل لدينا حل معادلة آبل التكاملية يعطى بالدستور

$$g(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(T)}{(x-T)^{1-\alpha}}\,dT$$

$$g(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x f(T)\,(x-T)^{\alpha-1}\,dT$$

$u=f(T)\qquad du=f'(T)$

$dv=(x-T)^{\alpha-1}\qquad v=-\frac{1}{\alpha}(x-T)^{\alpha}$

$$g(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{\alpha}f(T)(x-T)^{\alpha}\Big|_0^x+\frac{1}{\alpha}\int_0^x f'(T)(x-T)^{\alpha}\,dT\right]$$

$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\alpha}f(0)x^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^x(x-T)^{\alpha}f'(T)\,dT\right]$$

$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[f(0)x^{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\int_0^x\alpha(x-T)^{\alpha-1}f'(T)\,dT\right]$$

$$g(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}+\int_0^x\frac{f'(x)\,dT}{(x-T)^{1-\alpha}}\right]$$

مثال ص 278

اوجد حل معادلة آبل التكاملية التالية

$$\int_0^x\frac{g(y)\,dy}{(x-y)^{\frac{1}{2}}}=x+1 \qquad (1)$$

طريقة [II] لدينا $0<\alpha=\frac{1}{2}<1$

$f(x)=x+1$

حل المعادلة يعطى بالدستور

$$g(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(T)\,dT}{(x-T)^{1-\alpha}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{T+1}{(x-T)^{\frac{1}{2}}}\,dT$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x(1+T)(x-T)^{-\frac{1}{2}}\,dT$$

$u=1+T\qquad du=dT\qquad dv=(x-T)^{-\frac{1}{2}}\qquad v=-2(x-T)^{\frac{1}{2}}$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[-2(T+1)(x-T)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^x+2\int_0^x(x-T)^{\frac{1}{2}}\,dT\right]$$

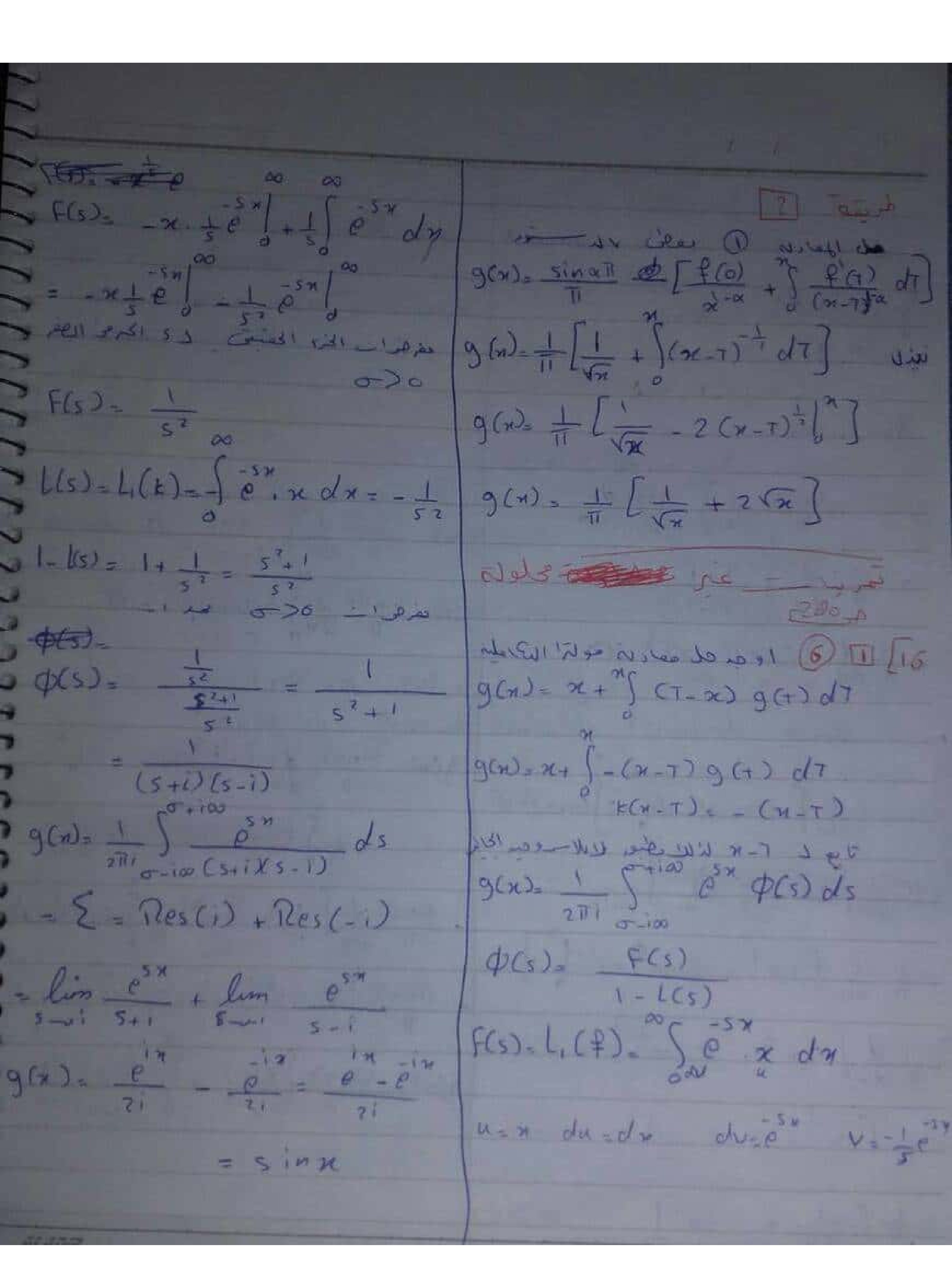
~~$\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[2x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\right]$~~

$$=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[2x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}(x-T)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[2x^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\right]\qquad x>0$$



طريقة 2

حل المعادلة ① نعوض بالقانون

$$g(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(T)}{(x-T)^{1-\alpha}}\,dT\right]$$

ينتج

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \int_0^x (x-T)^{-\frac{1}{2}}\,dT\right]$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - 2(x-T)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^x\right]$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right]$$

تمرين غير محلولة
ص 280

16 [1] ⑥ أوجد حل معادلة فولترا التكاملية

$$g(x) = x + \int_0^x (T-x)\,g(T)\,dT$$

$$g(x) = x + \int_0^x -(x-T)\,g(T)\,dT$$

$$K(x-T) = -(x-T)$$

تابع لـ $T-x$ لذلك نطبق لابلاس ومن الحل

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\,\phi(s)\,ds$$

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{1-L(s)}$$

$$F(s) = L_1(f) = \int_0^\infty e^{-sx}\,x\,dx$$

$u = x \quad du = dx \quad dv = e^{-sx} \quad v = -\frac{1}{s}e^{-sx}$

$$F(s) = -x\cdot\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\,dx$$

$$= -x\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2}e^{-sx}\Big|_0^\infty$$

نفرض أن الجزء الأول لـ s أكبر من الصفر

$\sigma > 0$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$L(s) = L_1(k) = -\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x\,dx = -\frac{1}{s^2}$$

$$1 - L(s) = 1 + \frac{1}{s^2} = \frac{s^2+1}{s^2}$$

نفرض أن $\sigma > 0$ ...

$$\phi(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2+1}{s^2}} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{(s+i)(s-i)}$$

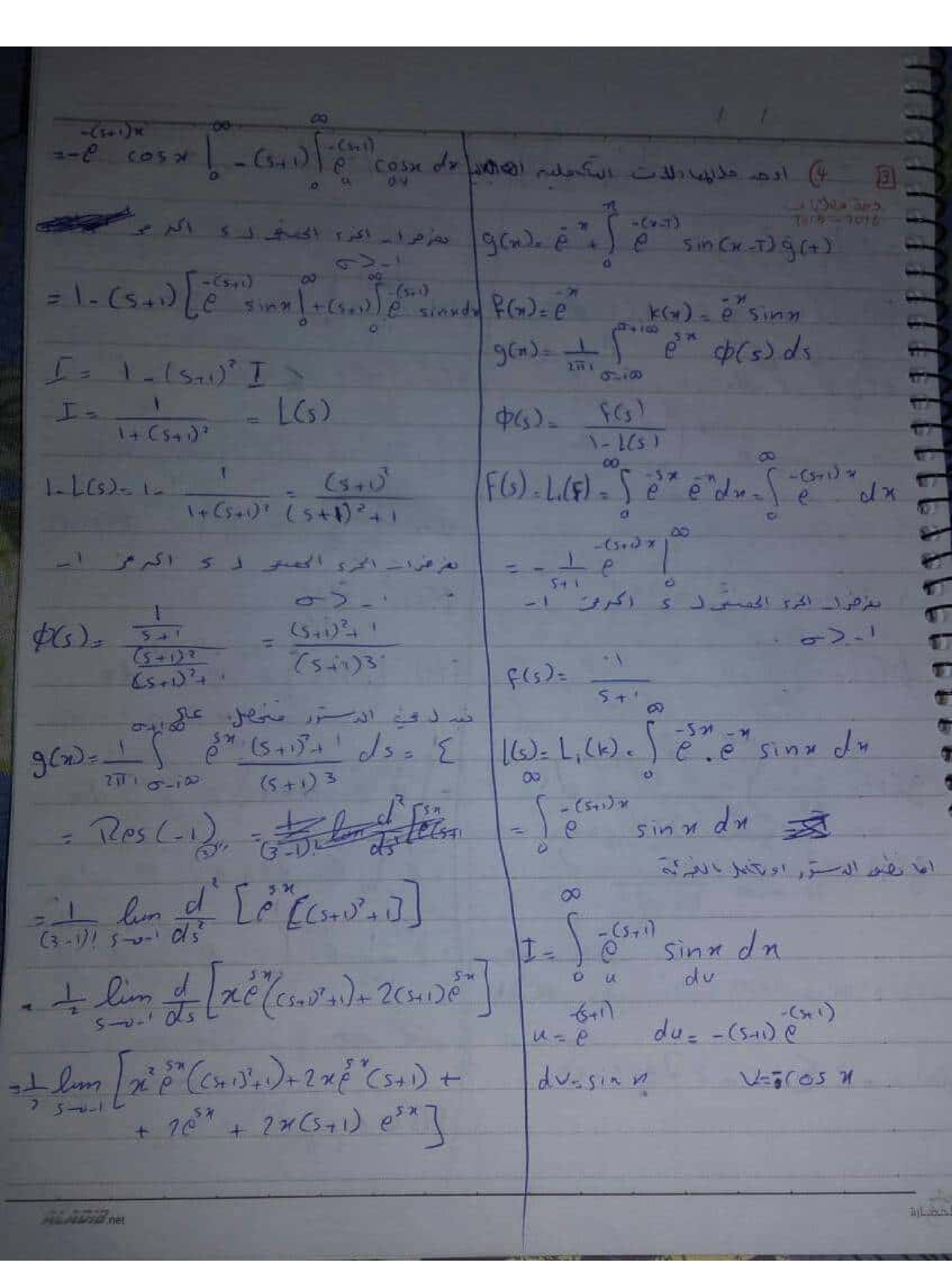
$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s+i)(s-i)}\,ds$$

$$= \sum = Res(i) + Res(-i)$$

$$= \lim_{s\to i}\frac{e^{sx}}{s+i} + \lim_{s\to -i}\frac{e^{sx}}{s-i}$$

$$g(x) = \frac{e^{ix}}{2i} - \frac{e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$= \sin x$$



3 ④ اوجد حل المعادلات التكاملية الاتية

$$g(x) = e^{-x} + \int_0^{x} e^{-(x-t)} \sin(x-t)\, g(t)$$

$$f(x) = e^{-x} \qquad k(x) = e^{-x}\sin x$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx}\, \phi(s)\, ds$$

$$\phi(s) = \frac{f(s)}{1 - l(s)}$$

$$F(s) = L_1(f) = \int_0^\infty e^{-sx} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-(s+1)x} dx$$

$$= -\frac{1}{s+1} e^{-(s+1)x} \Big|_0^\infty$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من -1

$$\sigma > -1$$

$$f(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$l(s) = L_1(k) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{-x} \sin x\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+1)x} \sin x\, dx$$

اما نطبق الدستور او نكامل بالتجزئة

$$I = \int_0^\infty \underbrace{e^{-(s+1)}}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv}$$

$$u = e^{-(s+1)} \qquad du = -(s+1) e^{-(s+1)}$$

$$dv = \sin x \qquad v = \overline{o}\cos x$$

$$= -e^{-(s+1)x}\cos x \Big|_0^\infty - (s+1)\int_0^\infty e^{-(s+1)} \cos x\, dx$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من -1

$$\sigma > -1$$

$$= 1 - (s+1)\left[e^{-(s+1)} \sin x \Big|_0^\infty + (s+1)\int_0^\infty e^{-(s+1)} \sin x\, dx \right.$$

$$I = 1 - (s+1)^2 I$$

$$I = \frac{1}{1+(s+1)^2} = L(s)$$

$$1 - L(s) = 1 - \frac{1}{1+(s+1)^2} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+1}$$

نفرض ان الجزء الحقيقي لـ s اكبر من -1

$$\sigma > -1$$

$$\phi(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+1}} = \frac{(s+1)^2+1}{(s+1)^3}$$

نعوض في الدستور فنحصل على

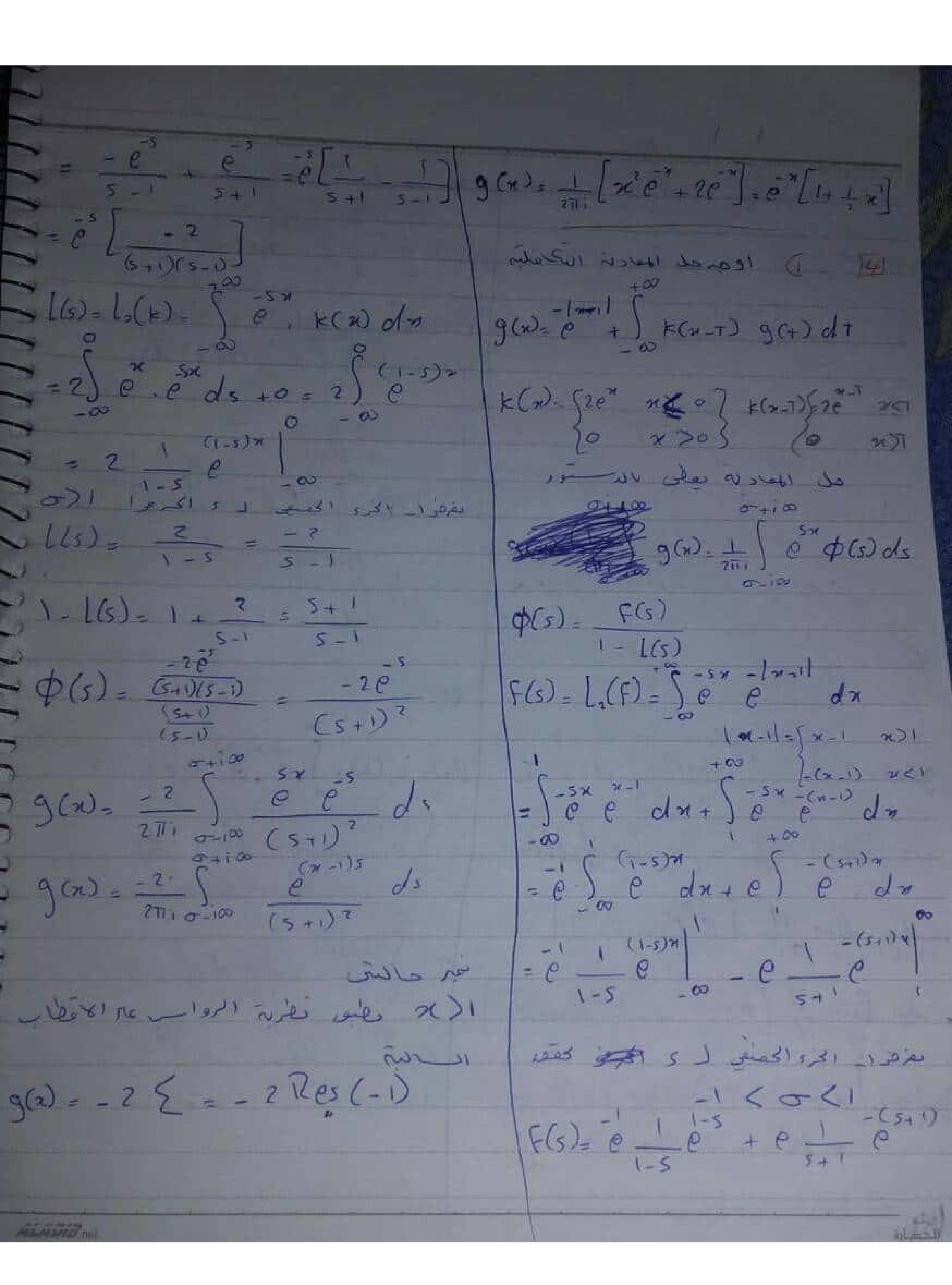
$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} \frac{(s+1)^2+1}{(s+1)^3}\, ds = \Sigma$$

$$= \text{Res}(-1)_{(3)} = \text{[crossed out]}$$

$$= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{s \to -1} \frac{d^2}{ds^2}\left[e^{sx}\left[(s+1)^2+1\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds}\left[x e^{sx}\left((s+1)^2+1\right) + 2(s+1) e^{sx}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{s \to -1} \left[x^2 e^{sx}\left((s+1)^2+1\right) + 2x e^{sx}(s+1) + 2e^{sx} + 2x(s+1) e^{sx}\right]$$



$= \frac{-e^{-s}}{s-1} + \frac{e^{-s}}{s+1} = e^{-s}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right]$

$= e^{-s}\left[\frac{-2}{(s+1)(s-1)}\right]$

$L(s) = L_2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} \cdot k(x)\, dx$

$= 2\int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot e^{-sx}\, ds + 0 = 2\int_{-\infty}^{0} e^{(1-s)x}$

$= 2\,\frac{1}{1-s}\, e^{(1-s)x}\Big|_{-\infty}^{0}$

نفرض أن الجزء الحقيقي لـ s أصغر من 1 $\sigma<1$

$L(s) = \frac{2}{1-s} = \frac{-2}{s-1}$

$1 - L(s) = 1 + \frac{2}{s-1} = \frac{s+1}{s-1}$

$\Phi(s) = \frac{\frac{-2e^{-s}}{(s+1)(s-1)}}{\frac{(s+1)}{(s-1)}} = \frac{-2e^{-s}}{(s+1)^2}$

$g(x) = \frac{-2}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}\, e^{-s}}{(s+1)^2}\, ds$

$g(x) = \frac{-2}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{(x-1)s}}{(s+1)^2}\, ds$

نميز حالتين

$x>1$ نطبق نظرية الرواسب عن الأقطاب السالبة

$g(x) = -2\sum = -2\,Res(-1)$

$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\left[x^2 e^{-x} + 2e^{-x}\right] = e^{-x}\left[1 + \frac{1}{2}x^2\right]$

[4] ① أوجد حل المعادلة التكاملية

$g(x) = e^{-|x-1|} + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\, g(t)\, dt$

$k(x) = \begin{cases} 2e^{x} & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad k(x-t) = \begin{cases} 2e^{x-t} & x \le t \\ 0 & x > t \end{cases}$

حل المعادلة يعطى بالدستور

$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\, \Phi(s)\, ds$

$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - L(s)}$

$F(s) = L_2(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\, e^{-|x-1|}\, dx$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x>1 \\ -(x-1) & x<1 \end{cases}$

$= \int_{-\infty}^{1} e^{-sx} e^{x-1}\, dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-sx} e^{-(x-1)}\, dx$

$= e^{-1}\int_{-\infty}^{1} e^{(1-s)x}\, dx + e\int_{1}^{+\infty} e^{-(s+1)x}\, dx$

$= e^{-1}\frac{1}{1-s} e^{(1-s)x}\Big|_{-\infty}^{1} - e\,\frac{1}{s+1} e^{-(s+1)x}\Big|_{1}^{\infty}$

نفرض أن الجزء الحقيقي لـ s يحقق

$-1 < \sigma < 1$

$F(s) = e^{-1}\frac{1}{1-s} e^{1-s} + e\,\frac{1}{s+1} e^{-(s+1)}$

$$= -2\,\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d}{dx}\,e^{(x-1)s}$$

$$= -2\lim_{s\to -1}(x-1)\,e^{(x-1)s} = -2(x-1)\,e^{1-x}$$

$x<1$ نطبق نظرية البواقي عند الأقطاب العلوية

$$g(x) = 0$$

ثم أوجد حل المعادلة التكاملية

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\,w(T)\,dT$$

$$w(x) = e^{ax}$$

a لابد يتحدد في المعادلة التكاملية

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aT}K(T)\,dT = 1$$

$$2\int_{-\infty}^{0} e^{-aT}e^{T}\,dT + \int_{0}^{+\infty} e^{-aT}\cdot 0\,dT = 1$$

$$2\int_{-\infty}^{0} e^{(1-a)T}\,dT = 1$$

$$2\,\frac{1}{1-a}\,e^{(1-a)T}\Big|_{-\infty}^{0} = 1$$

نفرض الجزء الحقيقي لـ a أصغر من ١ لكي

$$2\,\frac{1}{1-a} = 1 \Rightarrow 1-a = 2 \Rightarrow a = -1$$

5

٤) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^{\frac{1}{4}}}\,dy = -3x^2 + 2x$$

المعادلة المعطاة هي معادلة آبل التكاملية

$f(x) = -3x^2 + 2x \qquad f(0) = 0$

$0 < \alpha = \frac{1}{4} < 1$

$$g(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(T)}{(x-T)^{1-\alpha}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\int_0^x \frac{-6T+2}{(x-T)^{\frac{3}{4}}}\,dT\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^x (-6T+2)(x-T)^{-\frac{3}{4}}\,dT$$

$u = -6T+2 \qquad dv = (x-T)^{-\frac{3}{4}}$

$du = -6 \qquad v = -4(x-T)^{\frac{1}{4}}$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\Big[-4(-6T+2)(x-T)^{\frac{1}{4}}\Big|_0^x - 24\int_0^x (x-T)^{\frac{1}{4}}\,dT$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[8x^{\frac{1}{4}} - 24\cdot\frac{4}{5}(x-T)^{\frac{5}{4}}\Big|_0^x\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\Big[8x^{\frac{1}{4}} - \frac{96}{5}x^{\frac{5}{4}}$$